

УДК 536.246:536.421.1.

## Приближённый метод расчёта времени плавления шугообразного криопродукта в цилиндрической горизонтальной емкости

Товарных Г. Н.<sup>1,\*</sup>

[\\*tovamjx@yandex.ru](mailto:tovamjx@yandex.ru)

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

---

Предложен приближённый метод расчета времени плавления шугообразного криопродукта в горизонтальной цилиндрической емкости со сферическими днищами при дренажном хранении. Рассмотрена задача о нахождении положения границы раздела между чистой жидкостью и шугой с учетом тепловых потоков со стороны стенок и области чистой жидкости. Принято, что область шуги изотермична и имеет температуру плавления твердой фазы, граница раздела шуга – чистая жидкость плоская, свободная поверхность жидкости неподвижна и имеет температуру насыщения при заданном давлении. Температура в области чистой жидкости распределена по линейному закону. Полученные приближенные соотношения позволяют оценить время плавления шугообразного криопродукта в емкости без детального расчета температурных полей в области чистой жидкости.

**Ключевые слова:** криогенная жидкость, криопродукт, дренажное хранение, жидкость, шуга, плавление, емкость

---

### Введение

Использование криогенных жидкостей в виде смеси жидкой и твердой фаз (в так называемом шугообразном состоянии) позволяет существенно уменьшить затраты на их транспортировку и хранение, поскольку тепло, проникающее в резервуар, тратится в начале на плавление твердой фазы и лишь затем — на нагрев и испарение жидкости.

В работе [1] приведены результаты численного решения задачи о плавлении шугообразного криопродукта в вертикальной цилиндрической ёмкости. Приближённый аналитический метод расчета времени плавления шугообразного криопродукта в сферической емкости при дренажном хранении представлен в работе [2]. Методика расчета положения подвижной границы с учетом плавления твердой фазы представлена в работах [3-11].

В данной статье получены приближенные формулы для определения времени плавления шугообразного криопродукта в горизонтальной цилиндрической емкости со сферическими днищами.

## 1. Постановка задачи

Шуга рассматривается как квазижидкая среда. Плавление происходит как под действием тепловых потоков, поступающих со стороны твердых стенок, имеющих контакт с шугой, так и под действием теплового потока, поступающего к шуге сверху, со стороны чистой жидкости. При этом принимается предположение о том, что температура распределена в чистой жидкости в вертикальном направлении по линейному закону (рис. 1).

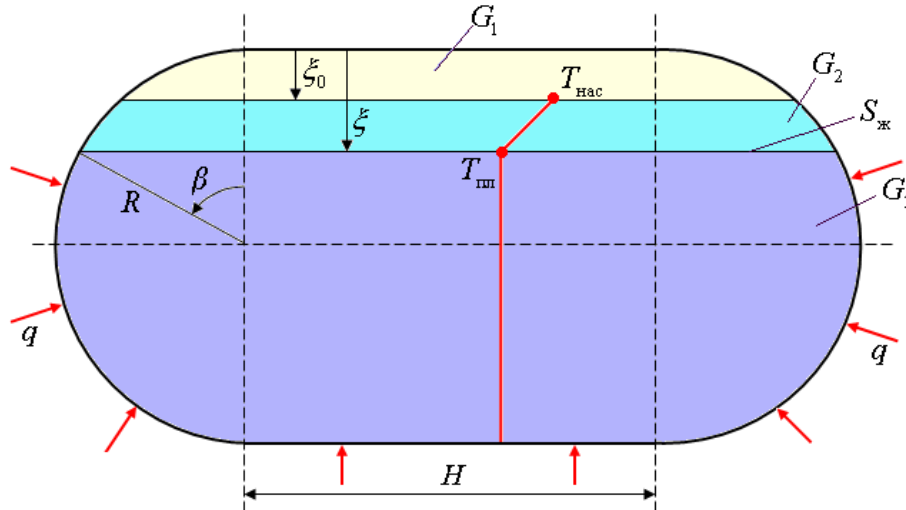


Рис. 1. Плавление шуги в горизонтальной цилиндрической емкости со сферическими днищами.

$G_1$  - область пара,  $G_2$  - область чистой жидкости,  $G_3$  - область шуги.

## 2. Основные соотношения

Балансное условие Стефана для шуги, частично заполняющей горизонтальную цилиндрическую емкость со сферическими днищами, имеет вид:

$$\left( q S_{\phi 1} + q S_{\phi 2} + \lambda_{\text{ж}} \frac{T_{\text{нас}} - T_{\text{пл}}}{\xi - \xi_0} S_{\text{ж}1} + \lambda_{\text{ж}} \frac{T_{\text{нас}} - T_{\text{пл}}}{\xi - \xi_0} S_{\text{ж}2} \right) dt =$$

$$= L_{\text{пл}} \rho_{\text{тв}} \varphi(dV_1 + dV_2), \quad (1)$$

где  $S_{\phi 1}$  - суммарная площадь сферической поверхности стенки, имеющей контакт с шугой;  $S_{\phi 2}$  - площадь цилиндрической поверхности стенки, имеющей контакт с шугой;  $S_{\text{ж}1}$  - суммарная площадь поверхности раздела между шугой и чистой жидкостью в области сферических днищ;  $S_{\text{ж}2}$  - площадь поверхности раздела между шугой и чистой жидкостью в цилиндрической части емкости;  $q$  - удельный тепловой поток;  $t$  - время;  $\xi$  - коор-

дината границы раздела шуга- область чистой жидкости;  $\xi_0$  - начальная координата границы раздела шуга- область чистой жидкости;  $T_{\text{нас}}$  - температура насыщенных паров (температура границы раздела жидкость – пар);  $T_{\text{пл}}$  - температура плавления твёрдой фазы;  $L_{\text{пл}}$  - теплота плавления;  $\rho_{\text{тв}}$  - плотность твёрдой фазы;  $\varphi$  - концентрация твёрдой фазы в шуге;  $\lambda_{\text{ж}}$  - теплопроводность жидкой фазы;  $dV_1$  - элементарный объём в области сферических днищ, в котором происходит плавление шуги;  $dV_2$  - элементарный объём в цилиндрической части емкости, в котором происходит плавление шуги.

В соответствии с рис. 1 запишем очевидные геометрические соотношения [3]:

$$S_{\text{б1}} = 2\pi R(2R - \xi),$$

$$S_{\text{ж1}} = \pi(2R - \xi)\xi,$$

$$dV_1 = S_{\text{ж1}}d\xi = \pi(2R - \xi)\xi d\xi,$$

$$\xi = R(1 - \cos \beta), \quad \beta = \arccos\left(1 - \frac{\xi}{R}\right),$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2},$$

$$S_{\text{б2}} = 2R(\pi - \beta)H = 2R\left(\pi - \arccos\left(1 - \frac{\xi}{R}\right)\right)H,$$

$$S_{\text{ж2}} = 2HR \sin \beta = 2HR \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2},$$

$$dV_2 = S_{\text{ж2}}d\xi = 2HR \sin(\beta)d\xi = 2HR \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2} d\xi.$$

Подставляя эти соотношения в (1) получим:

$$\left( q 2\pi R(2R - \xi) + q 2R\left(\pi - \arccos\left(1 - \frac{\xi}{R}\right)\right)H + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_{\text{ж}} \frac{T_{\text{нас}} - T_{\text{пл}}}{\xi - \xi_0} \pi (2R - \xi) \xi + \lambda_{\text{ж}} \frac{T_{\text{нас}} - T_{\text{пл}}}{\xi - \xi_0} 2HR \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2} \Bigg) dt = \\
& = L_{\text{пл}} \rho_{\text{тв}} \varphi \left( \pi (2R - \xi) \xi + 2HR \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2} \right) d\xi, \tag{2}
\end{aligned}$$

Приведем уравнение (2) к безразмерному виду

$$\begin{aligned}
& \left( \bar{q} 2\pi (2 - \bar{\xi}) + \bar{q} 2 \left( \pi - \arccos(1 - \bar{\xi}) \right) K + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0} \pi (2 - \bar{\xi}) \bar{\xi} + \frac{1}{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0} 2K \sqrt{1 - (1 - \bar{\xi})^2} \right) dFo = \\
& = Ko \left( \pi (2 - \bar{\xi}) \bar{\xi} + 2K \sqrt{1 - (1 - \bar{\xi})^2} \right) d\bar{\xi}, \tag{3}
\end{aligned}$$

где

$$\bar{q} = \frac{qR}{\lambda_{\text{ж}} (T_{\text{нас}} - T_{\text{пл}})} - \text{безразмерный тепловой поток}, \quad Fo = \frac{a_{\text{ж}} t}{R^2} - \text{число Фурье},$$

$$Ko = \frac{L_{\text{пл}} \rho_{\text{тв}} \varphi}{c_{\text{рж}} \rho_{\text{ж}} (T_{\text{нас}} - T_{\text{пл}})} - \text{число Коссовича}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{R}, \quad \bar{\xi}_0 = \frac{\xi_0}{R}, \quad a_{\text{ж}} = \frac{\lambda_{\text{ж}}}{c_{\text{рж}} \rho_{\text{ж}}},$$

$a_{\text{ж}}$  - температуропроводность жидкой фазы,  $c_{\text{рж}}$  - теплоёмкость жидкой фазы,

$\rho_{\text{ж}}$  - плотность жидкой фазы.

Из уравнения (3) можно выразить безразмерное время (число Фурье):

$$Fo = Ko \int_{\bar{\xi}_0}^{\bar{\xi}} \frac{(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0) \left( \pi (2 - \bar{\xi}) \bar{\xi} + 2K \sqrt{2\bar{\xi} - \bar{\xi}^2} \right)}{f(\bar{\xi})} d\bar{\xi}. \tag{4}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
f(\bar{\xi}) = & (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0) \bar{q} \left( 2\pi (2 - \bar{\xi}) + 2 \left( \pi - \arccos(1 - \bar{\xi}) \right) K \right) + \\
& + \pi (2 - \bar{\xi}) \bar{\xi} + 2K \sqrt{2\bar{\xi} - \bar{\xi}^2}.
\end{aligned}$$

Полное время плавления шуги будет определяться из уравнения (4) при значении верхнего предела интегрирования  $\bar{\xi} = 2$ .

Выразим текущий объем, занимаемый шугой.

$$V_{\text{ш}} = V_{\text{ш1}} + V_{\text{ш2}}.$$

Здесь

$$V_{\text{ш1}} = \frac{\pi}{3} (2R - \xi)^2 (R + \xi) - \text{текущий объем, занимаемый шугой в области сферических днищ;}$$

$$V_{\text{ш2}} = HR^2 \left( \pi - \arccos(1 - \bar{\xi}) + (1 - \bar{\xi}) \sqrt{2\bar{\xi} - \bar{\xi}^2} \right) - \text{текущий объем, за-}$$

нимаемый шугой в цилиндрической области.

Отношение текущего объема, занимаемого шугой, к первоначальному объему, имеет вид:

$$\bar{V}_{\text{ш}} = \frac{\pi(2 - \bar{\xi})^2(1 + \bar{\xi}) + 3K \left( \pi - \arccos(1 - \bar{\xi}) + (1 - \bar{\xi}) \sqrt{2\bar{\xi} - \bar{\xi}^2} \right)}{\pi(2 - \bar{\xi}_0)^2(1 + \bar{\xi}_0) + 3K \left( \pi - \arccos(1 - \bar{\xi}_0) + (1 - \bar{\xi}_0) \sqrt{2\bar{\xi}_0 - \bar{\xi}_0^2} \right)} \quad (5).$$

Если пренебречь тепловым потоком, поступающим к шуге со стороны чистой жидкости, то вместо (4) можно записать

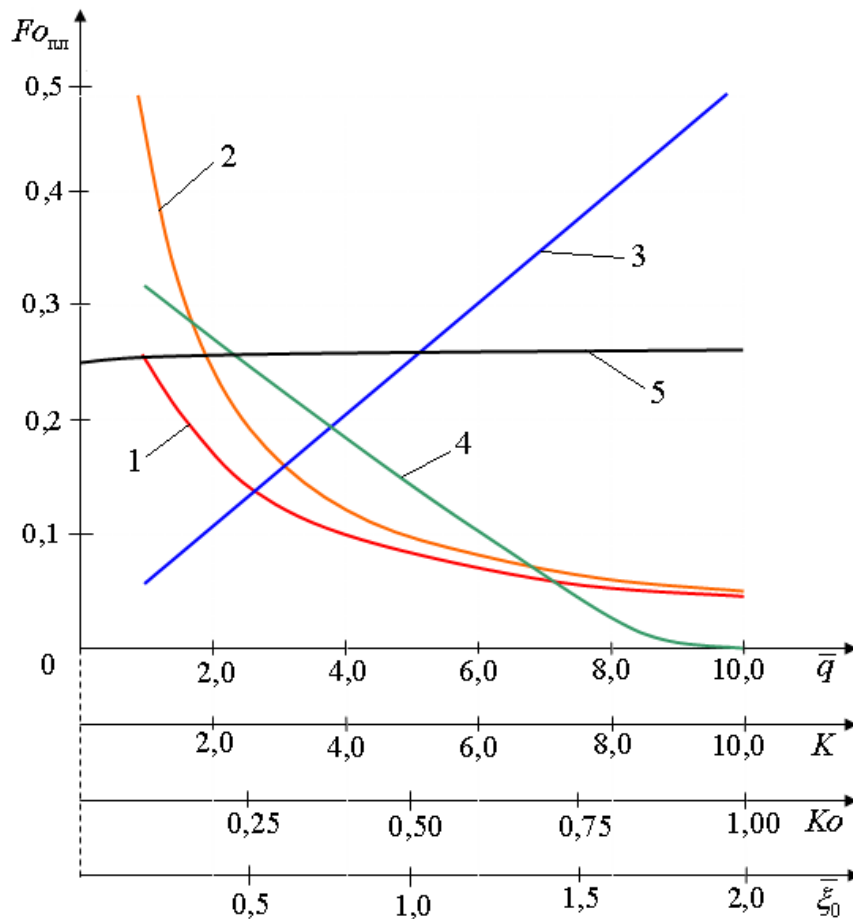
$$Fo = Ko \int_{\bar{\xi}_0}^{\bar{\xi}} \frac{\pi(2 - \bar{\xi})\bar{\xi} + 2K \sqrt{2\bar{\xi} - \bar{\xi}^2}}{2\bar{q} \left( \pi(2 - \bar{\xi}) + K \left( \pi - \arccos(1 - \bar{\xi}) \right) \right)} d\bar{\xi}. \quad (6)$$

### 3. Результаты расчетов

На рисунке 2 представлена зависимость полного времени плавления шуги от основных параметров. Базовый вариант соответствует следующим значениям основных параметров:  $\bar{q} = 1$ ;  $Ko = 0,5$ ;  $\bar{\xi}_0 = 0,5$ ;  $K=2$ .

Кривая 1 отражает зависимость  $Fo_{\text{пл}} = f(\bar{q})$  с учётом теплового потока со стороны чистой жидкости, а кривая 2 зависимости  $Fo_{\text{пл}} = f(\bar{q})$  без учёта теплового потока со стороны чистой жидкости. Расхождение между кривыми 1 и 2 при  $\bar{q} = 1$  достигает 97 %, а при  $\bar{q} \geq 10$  меньше 11 %. Кривая 3 показывает линейную зависимость  $Fo_{\text{пл}} = f(Ko)$ , а кривая 4 отражает зависимость  $Fo_{\text{пл}} = f(\bar{\xi}_0)$ . В диапазоне

$0,1 \leq \bar{\xi}_0 \leq 1,6$  кривая 4 также близка к линейной. Кривая 5 показывает, что изменение длины цилиндрической части емкости не оказывает существенного влияния на время плавления шуги. Так при  $K = 1$  имеем  $Fo_{\text{пл}} = 0,2557$ , а при  $K = 10$  получаем  $Fo_{\text{пл}} = 0,2628$ .



**Рис. 2.** Зависимость полного времени плавления от основных параметров. зависимость  $Fo_{\text{пл}} = f(\bar{q})$  с учётом теплового потока со стороны чистой жидкости; 2 - зависимость  $Fo_{\text{пл}} = f(\bar{q})$  без учёта теплового потока со стороны чистой жидкости; 3 - зависимость  $Fo_{\text{пл}} = f(Ko)$ ; 4 - зависимость  $Fo_{\text{пл}} = f(\bar{\xi}_0)$ ; 5 - зависимость  $Fo_{\text{пл}} = f(K)$ .

### Заключение

В статье получены аналитические формулы, позволяющие оценить время плавления шугообразного криопродукта в горизонтальной цилиндрической емкости без определения локальных температурных полей в области чистой жидкости. Формулы записаны в безразмерном виде с использованием известных критериев Фурье и Коссовича, что позволяет использовать их для широкого круга криогенных жидкостей. Результаты расчетов пред-

ставлены в графическом виде и дают возможность выделить наиболее существенные параметры, влияющие на полное время плавления твердой фазы шугообразного криопродукта. Проведенная работа предполагает дальнейшее исследование процессов тепло- и массопереноса в емкостях, частично заполненных криогенными жидкостями с включением твердой фазы. Представленные в работе результаты можно использовать при проектировании систем долговременного хранения криогенных компонентов топлива, а полученные приближенные соотношения в качестве обобщающих зависимостей при экспериментальных исследованиях.

### Список литературы

1. Товарных Г.Н. Плавление шугообразного водорода в вертикальной цилиндрической ёмкости // Инженерный вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журнал. 2014. №10. Режим доступа: <http://engbul.bmstu.ru/doc/738604.html>, (дата обращения 01.10.2015).
2. Тарасова А.В., Товарных Г.Н. Приближённый метод расчёта плавления шугообразного криопродукта в сферической ёмкости // Инженерный журнал: наука и инновации. 2015. вып. 4. DOI: [10.18698/2308-6033-2015-4-1394](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2015-4-1394)
3. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.
4. Гольдман Н. Л. Обратные задачи Стефана. Теория и методы решения. М.: Изд-во МГУ, 1999, 64 с.
5. Товарных Г.Н. Рост давления в плоской щели при замерзании теплоносителя // Инженерный вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журнал. 2014. №11. Режим доступа: <http://engbul.bmstu.ru/doc/738625.html>, (дата обращения 01.10.2015).
6. Задача Стефана для адиабатического намораживания воды холодом гранул / А.С. Ащеулова, А.А. Храпов, В.В. Рагулин, В.И. Полтавцев // Вестник КрасГАУ. 2007. №1. С.26–30
7. Кувыркин Г.Н., Ломохова А.В. Математическое моделирование процесса кристаллизации в установках для выращивания монокристаллов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2007. №4. С. 37-44.
8. Крылов Д.А., Мельникова Ю.С. Математическое моделирование распределения температурных полей в криолитозоне // Студенческий научный вестник. Сборник статей четвертой научно-технической выставки «Политехника». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. С. 94-97.
9. Крылов Д.А., Сидняев Н.И. Метод расчета массовой кристаллизации многофазных реологических сред // Материалы Четвертой конференции геокриологов России. МГУ им. М.В. Ломоносова, 7-9 июня 2011 г. т. 1. Часть 1. Физико-химия, теплофизика и механика мерзлых пород. М.: Университетская книга, 2011. С.129-136.

10. Парфентьева Н.А., Самарин О.Д. О колебаниях фронта промерзания в ограждениях и численном моделировании задачи Стефана // Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века. 2002. №11. С.46-47.
11. Ерохина О.С. Расчет времени протаивания криоботом ледяных структур // Труды IX Всероссийской научно-технической конференции «Авиакосмические технологии АКТ-2008». Воронеж: ВГТУ, 2008. С. 70-75.



## Approximate Method to Calculate Melting Time of Sludge-Like Cryogenic Product in Cylindrical Horizontal Tank

G.N. Tovarnykh<sup>1,\*</sup>

\*[tovamjx@yandex.ru](mailto:tovamjx@yandex.ru)

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

---

**Keywords:** cryogenic liquid, cryogenic product, drainage storage, liquid, sludge-like substance, melting, cylindrical tank

---

The paper proposes an approximate method to calculate the melting time of the sludge-like cryogenic product in horizontal cylindrical tank with spherical bottoms during drainage storage. The problem to find where there is the liquid - clean slush interface taking into account the heat flows from the walls and the area of clean liquid. It is assumed that the area of sludge is isothermal and has a melting point of solids, sludge - clean liquid interface is flat, free surface of the liquid is stationary and has a saturation temperature at a given pressure. The temperature in the clean liquid is distributed linearly. These approximate relationships allow us to estimate the melting time of the sludge-like cryogenic product in tank without detailed calculation of temperature fields in clean liquid.

### References

1. Tovarnykh G.N. The sludge-like fusion of hydrogen in a vertical cylindrical tank. *Inzhenernyi vestnik MGTU im. N.E. Baumana = Engineering Herald of the Bauman MSTU*, 2014, no. 10. Available at: <http://engbul.bmstu.ru/doc/738604.html>, accessed 01.10.2015. (in Russian).
2. Tarasova A.V., Tovarnykh G.N. An approximate method of calculating time of a slush-like cryogenic product melting in a spherical container. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2015, iss. 4. (in Russian). DOI: [10.18698/2308-6033-2015-4-1394](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2015-4-1394)
3. Meirmanov A.M. *Zadacha Stefana* [Stefan Problem]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1986. 239 p. (in Russian).
4. Gol'dman N. L. *Obratnye zadachi Stefana. Teoriya i metody resheniya* [The inverse Stefan problem. Theory and methods of solution]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1999. 64 p. (in Russian).

5. Tovarnykh G.N. An increase of pressure in flat cracks during freezing of the coolant. *Inzhenernyi vestnik MGTU im. N.E. Baumana = Engineering Herald of the Bauman MSTU*, 2014, no. 11. Available at: <http://engbul.bmstu.ru/doc/738625.html>, accessed 01.10.2015. (in Russian).
6. Ashcheulova A.S., Khrapov A.A., Ragulin V.V., Poltavtsev V.I. Stefan problem for adiabatic freezing cold water pellets. *Vestnik KrasGAU = Bulletin of KrasGAU*, 2007, iss.1, pp.26-30. (in Russian).
7. Kuvyrkin G.N., Lomokhova A.V. Simulation of Crystallization Process in Facilities for Growing Monocrystals. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science*, 2007, iss.4, pp. 37-44. (in Russian).
8. Krylov D.A., Mel'nikova Yu.S. [Mathematical modeling of distribution of temperature fields in the permafrost zone]. *Studencheskii nauchnyi vestnik. Sbornik statei chetvertoi nauchno-tekhnicheskoi vystavki «Politehnika»*. [Student scientific Bulletin. Collection of articles of IV scientific and technical exhibition «Polytechnic»]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2009, pp.94-97. (in Russian).
9. Krylov D.A., Sidnyaev N.I. [The method of calculation of mass crystallization of multiphase rheological environments]. *Materialy Chetvertoi konferentsii geokriologov Rossii. Chast' I. Fiziko-khimiya, teplofizika i mekhanika merzlykh porod*. [IV conference of geocryologic. Materials of conference. Part 1. Physical chemistry, Thermophysics and mechanics of frozen soils]. Moscow, Universitetskaya kniga Publ., 2011, pp.129-136. (in Russian).
10. Parfentyeva N.A., Samarin O.D. On the oscillations of the frost penetration front in enclosing structures and the numerical simulation of the Stephan problem. *Stroitel'nye materialy, oborudovanie, tekhnologii XXI veka = Construction materials, the equipment, technologies of XXI century*, 2002, no.11, pp.46-47. (in Russian).
11. Erokhina O.S. [The timing of thawing cryobot the ice structures] *Trudy IX Vserossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii «Aviakosmicheskie tekhnologii AKT-2008»* [Proceedings of the IX all-Russian scientific and technical conference "aerospace technology ACT-2008"]. Voronezh, VGTU, 2008, pp. 70-75. (in Russian).